Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις No. 6ο Date 24/10/19

{ e-course
{ Εργασίες

σε μια ομογενή εξίσωση } κάναμε μετασχηματισμό $z = \frac{y}{x}$

- Η εξίσωση δεν είναι ομογενής

$$y' = \frac{\alpha_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha_2 x b_2 y + c_2} \quad \alpha_i, b_i \in \mathbb{R}$$

όμως αν $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ η εξίσωση γίνεται ομογενής. γιατί $\frac{dY}{dX} = 1$

ή $\begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = Y'$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\alpha_1 X + b_1 Y + \overset{0}{(\alpha_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1)}}{\alpha_2 X + b_2 Y + \underset{0}{(\alpha_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2)}}$$

Παράδειγμα:

$$(x+y)dx + (2x+y-3)dy = 0$$

$$\Rightarrow (2x+y-3)dy = -(x+y)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{2x+y-3}$$

Για να βρώ τις σταθερές $\begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -3 \end{cases}$

αρα για τον μετασχηματισμό

θέτω $\begin{cases} Z = x+3 \\ y = y-3 \end{cases}$

Είναι

$$\partial x = \partial X \ , \ dy = \partial Y$$ και η εξίσωση γράφεται:

$$\underset{\text{ως προς } X}{Y'} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{X+Y}{2X+Y} = -\frac{1+Y/x}{2+Y/X}$$

$$Z = \frac{Y}{X} \Rightarrow XZ = Y \Rightarrow Y' = Z'X + Z$$

$$Z'X + Z = -\frac{1+Z}{2+Z}$$

$$Z'X = -\frac{1+Z}{Z+2} - f = \frac{-1+Z-2Z+Z^2}{1+Z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{Z^2+3Z+1}{1+Z}$$

$$\frac{1+Z}{-Z^2+3Z+1}\partial Z = -\partial X$$

Παρατήρηση στην (A-2) δοκ.

$$(x-y+3)dx + (x+2y-3)dy = 0$$

Για τα x_0, y_0 $\Rightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=2 \end{cases}$

$$\int \frac{1+2Z}{1+2Z^2}dZ = \int \frac{1}{1+2Z^2}dZ + \int \frac{2Z}{1+2Z^2}dZ$$

τόξο εφαπτομ.

$u = \sqrt{2}Z$ $= \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y-2}{x+1}\sqrt{2}\right) + \log\left[(x+1)^2 + 2(y-2)^2\right] = C_1$

No. Date

$$\underbrace{M(x,y)}_{\frac{\partial f}{\partial x}}dx + N(x,y)dy = 0 \quad (E)$$

$(x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω - τοπος

$$\left.\begin{array}{l} \partial f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ \quad \| \\ \quad 0 \\ \quad \Downarrow \\ f(x,y) = C \end{array}\right\}$$

$$a_1 y' + a_0(x)y = b(x)$$

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = b$$

$$a_1 dy + (a_0 y + b)dx = 0$$

Για την (E) οπου $N_x, M_y \in C^1(\Omega)$

Η (E) καλείται άμεσα ολοκληρώσιμη (στο Ω)

[πλήρη ακριβής - exact] αν $\exists\ f \in C^1(\Omega)$

και $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

Πρόταση: Θεωρώ την (E) με $M, N \in C^1(\Omega)$. Τότε η (E) είναι άμεσα ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

[Συνθηκη

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{κ'} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Big]$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 ii) σελ. 48:

$$\underbrace{(y \cdot e^{xy} + 2x)}_{M}dx + \underbrace{(x e^{xy} - 2y)}_{N}dy = 0 \qquad y(0) = 2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + y + e^{xy} \\ \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + y e^{xy} \end{array}\right\}$$

$\exists f$: $\partial f \neq 0$

$\partial(x,y) = e$

No. Date

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} + 2x \Rightarrow f(x,y) = \int (y e^{xy} + 2x)\,dx + g(y)$$

$$= e^{xy} + x^2 + g(y)$$

α΄ τρόπος: θα πρέπει $\frac{\partial f}{\partial y} = N \Rightarrow x \cdot e^{xy} + g'(y) = x \cdot e^{xy} - 2y$

$$\Rightarrow g(y) = -y^2 + c.$$

$f(x,y) = e^{xy} + x^2 - y^2 + c = C$ μας δίνει όλες τις λύσεις για όλες τις τιμές του C

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{xy} - 2y \Rightarrow f(x,y) = \int (x \cdot e^{xy} - 2y)\,dy + h(x)$$

$$= e^{xy} - y^2 + h'(x) \rightsquigarrow h(x).$$

3ος τρόπος: $x^2 + g'(y) = -y^2 + h'(x) = e^{xy} - y^2 + h(x) \rightsquigarrow h(x)$

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ: Αν (Ε) αφ. ολοκληρ. τότε

$$\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)\,ds = C \qquad \left\{ y(x_0) = y_0 \right.$$

Είναι λύσεις της (Ε)

No. Date

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ:

* Αν $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x) \rightsquigarrow p(x) = e^{\int p(x)dx}$

* Αν $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = Q(y) \rightarrow p(y) = e^{\int p(y)dy}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3/σελ. 45.

$\underbrace{xy}_{M}dx + (\underbrace{x^2+y^2+y}_{N})dy = 0.$

- $\dfrac{\partial M}{\partial y} = x$

- $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$

- $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{x-2x}{x^2+y^2+y}$ δεν δουλεύει [δεν είναι συνάρτ. του x].

$\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{2x-x}{xy} = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} = \dfrac{1}{y} = Q(y)$

$e(y) = e^{\int Q(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y.$

No. Date

→ Έστω ότι $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$ και $p(x) = e^{\int p(x)\, dx}$

θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$p(x) M(x,y) dx + p(x) N(x,y)\, dy = 0$. Είναι άμεσα ολοκληρώσιμη

Έχουμε • $\dfrac{\partial}{\partial y}(p(x) M(x,y)) = p(x) \dfrac{\partial M}{\partial y}$

• $\dfrac{\partial}{\partial x}(p(x) N(x,y)) = p'(x) N + p(x) \cdot \dfrac{\partial M}{\partial x}$

$= e^{\int p(x) dx}\, p(x) N + p(x) \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$= p(x) \left[p(x) N + \dfrac{\partial N}{\partial x} \right]$

$= p(x) \cdot \left[\dfrac{\partial M}{\partial y} \cancel{- \dfrac{\partial N}{\partial y}} \cancel{+ \dfrac{\partial N}{\partial y}} \right]$

$= p(x) \cdot \dfrac{\partial M}{\partial y}$

$= \partial\, (p(x) M(x,y))$

Αν έχω έναν ολοκλ. παράγοντα: τότε η εξίσωση Είναι άμεσα ολοκληρώσιμη

$p(x,y) M(x,y) dx + p(x,y) N(x,y) dy = 0$

$\dfrac{\partial p M}{\partial y} = \dfrac{\partial p N}{\partial x}$

$\dfrac{\partial p}{\partial y} M + e^{My} = \dfrac{\partial p}{\partial x} N + p N x$

$$\frac{\partial p}{\partial y} M - \frac{\partial p}{\partial x} N = p(N_x - M_y)$$

αν $p(x,y) = p(x)$ $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = p' \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$ $\Big\|$ $-p'(x)N = p(N_x - M_y)$

$$\frac{p'}{p} = \boxed{\frac{M_y - N_x}{N}} \quad \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \ln p = \int \varphi(x)\,dx$$

$$p(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}$$

- Αν έχουμε $P(x,y) = p(x)\,q(y)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = p'(x)\,q(y) \quad κ' \quad \frac{\partial P}{\partial y} = p(x)\,q'(y)$$

- Αν $\varphi(x,y) = \varphi(x-y)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \varphi'(x-y) \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\varphi'(x-y) \end{aligned}\right\}$$

$$-\varphi'(x-y)M - \varphi'(x-y)N = \varphi(x-y)(N_x - M_y)$$

$$\frac{\varphi'(x-y)}{\varphi(x-y)} = \frac{M_y - N_x}{M+N} = \int u(x-y)$$

Εχουμε την $y'+py=q$ θέλουμε να βρουμε τον ολοκλ. παράγοντα.

$$\partial y+(py-q)dx=0$$

$$N=1 \quad , M=py-q$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=p \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0.$$

Δεν είναι άμεσα ολοκλ. όμως

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{p}{1}=p \rightsquigarrow e^{\int p(x)dx}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5/σελ. 48. (Το βιβλίο έχει λάθος)

$$(xy^2+y)dx+2x^2ydy=0$$

$$\uparrow \text{ όχι } 3$$

$\rightsquigarrow$ ολοκλ. $\dfrac{1}{2xy(1-xy)}$.

$$\underbrace{\frac{xy^2+y}{2xy(1-xy)}}_{M}dx+\frac{2x^2y}{2xy(1-xy)}dy=0$$

$$\Rightarrow \frac{xy+1}{2xy(1-xy)}dx+\frac{2x^2y}{2xy(1-xy)}dy=0.$$

θα πρέπει να βρουμε τα $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ κ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ και να είναι ισα

Συνθήκη της εξίσωσης:

$$\frac{My - Nx}{yN - xM} = \varphi(xy)$$

• Για την δεύτερη τάξη έχουμε 2 περιπτώσεις

$y'' = F(x, y, y')$

1η περίπτωση:

• Αν $y'' = F(x, y')$ τότε $z = y' \rightsquigarrow z' = F(x, z)$

ΑΣΚΗΣΗ 4.4 ii) σελ. 352

$$xy'' = y' + x^2$$

$$xz' = z + x^2$$ ← εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{xz' - z}{x^2} = 1$$

$$\left(\frac{z}{x}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{z}{x} = x + c_1 \Rightarrow z = x^2 + c_1 x$$

2η περίπτωση:

$y'' = F(y, y')$

$$z = y' \rightsquigarrow y'' = z' = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y} z$$

$$- z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = F(y, z)$$

No. Date

ΑΣΚΗΣΗ 2 Ισοδ 52.

$$yy'' - (y')^2 = y^2 y'$$

$$yz\frac{\partial z}{\partial y} - z^2 = y^2 z$$

Αν $z \neq 0$ $\Rightarrow$ $y\frac{\partial z}{\partial y} - z = y^2 \Rightarrow z(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy}\left[c + \int \cancel{y} \cdot e^{\int -\frac{1}{y} dy}\right]$

διαιρώ με y

$$y'(x) z(y) = f(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(x)} = \int dx.$$